MA1 – cvičení 24. 11. 20

(1.) „Dopočítávání" derivací (a spojité „dodefinování" funkce v bodě)

1. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$, $x \neq 0$; $f(0) = 0$

a) ? f je spojitá v bodě $x = 0$: $\Leftrightarrow$? $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ $(=0)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \text{„}\frac{0}{0}\text{"} \underset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = 0,$$

tj. f je spojitá v bodě $x = 0$

(spojitost f v bodech $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ – zřejmá)

(limitu lze určit „též" z „tabulkové" limity:

$$- \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \cdot x = \text{„}1 \cdot 0\text{"} = 0$$

$$\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \underset{\substack{\text{VLSF} \\ x^2 = t}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \underset{(T)}{=} 1 \right)$$

b) $$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x} - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1 \quad (\text{T} + \text{VLSF})$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot 2x \cdot x - \ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}, \; x \neq 0$$

a opět, $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 2 - 1 = 1$ (f je spojitá v bodě $x = 0$)

„těžší" příklad:

$f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} (x-1)^2}$: $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá v $\mathbb{R}$ (spojitost složené funkce)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} (x-1)^2}} \cdot \left(\operatorname{arctg} (x-1)^2\right)' =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\operatorname{arctg} (x-1)^2}} \cdot \frac{1}{1+(x-1)^4} \cdot \cancel{2}(x-1) \quad , \quad x \neq 1$$

$$? \quad f'_{(\pm)}(1) = \lim_{x \to 1 (\pm)} f'(x)$$ – neboť f je spojitá v bodě $x=1$ (důsledek l'Hospitalova pravidla)

Tedy:
$$\lim_{x \to 1 (\pm)} f'(x) = \lim_{x \to 1\pm} \underbrace{\frac{1}{1+(x-1)^4}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x-1}{\sqrt{\operatorname{arctg} (x-1)^2}}}_{\to \pm 1} = \pm 1$$

a problém je v limitě

$$\lim_{x \to 1\pm} \frac{x-1}{\sqrt{\operatorname{arctg} (x-1)^2}} = „\frac{0}{0}" = \lim_{x \to 1\pm} \sqrt{\underbrace{\frac{(x-1)^2}{\operatorname{arctg} (x-1)^2}}_{\to 1 \text{ (VLSF+T)}}} \cdot \operatorname{sgn}(x-1)$$

$= \pm 1$

převedeme na $\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{arctg} t}{t} = 1$ (T)

$x - 1 = \sqrt{(x-1)^2} \cdot \operatorname{sgn} x \; (= |x-1| \cdot \operatorname{sgn} x)$

Tedy, f nemá oboustrannou derivaci v bodě $x=1$, jen jednostranné – $f'_{\pm}(1) = \pm 1$